

Sezione: MATEMATICA

ISTRUZIONI

- (1) Il candidato è tenuto a svolgere:
  - esattamente un tema a scelta fra quelli di **Algebra e Geometria**;
  - esattamente un tema a scelta fra quelli di **Calcolo**;
  - esattamente un esercizio a scelta fra quelli di **Algebra e Geometria**;
  - esattamente un esercizio a scelta fra quelli di **Calcolo**.
- (2) I temi vanno svolti *da un punto di vista superiore*: fornendo cioè dimostrazioni, esempi e controesempi, accennando in modo critico a sviluppi, fornendo collegamenti e applicazioni.
- (3) Ogni tema va svolto *non eccedendo due facciate* dei fogli protocollo timbrati che sono stati consegnati. Ogni esercizio va svolto *non eccedendo una facciata* dei fogli protocollo timbrati che sono stati consegnati.
- (4) Il candidato riceverà quattro fogli protocollo timbrati: due fogli per i due temi (un foglio per tema) e due fogli per i due esercizi (un foglio per esercizio).
- (5) Ogni foglio protocollo timbrato va intestato, dal candidato, col numero di tema o di esercizio corrispondente.
- (6) In conclusione il candidato consegnerà soltanto i quattro fogli protocollo timbrati con gli svolgimenti, mentre tratterrà i fogli “di brutta” non timbrati che gli verranno forniti in quantità idonea nel corso dello scritto.

**Algebra e Geometria**

*Tema 1.1.* Definire il campo dei numeri complessi a partire dai numeri reali e discuterne le principali proprietà.

*Tema 1.2.* Definire quando una trasformazione del piano viene detta similitudine. Descrivere le matrici quadrate  $M$  di ordine 2 e i vettori  $v \in \mathbf{R}^2$  per cui la trasformazione affine

$$P \mapsto MP + v, \quad P \in \mathbf{R}^2$$

è una similitudine del piano.

*Tema 1.3.* Definire le nozioni di spazio vettoriale (reale), dimensione di uno spazio vettoriale e prodotto scalare in uno spazio vettoriale. Fornire esempi interessanti e descrivere in particolare il caso dell'insieme dei polinomi di secondo grado a coefficienti in  $\mathbf{R}$ .

**Calcolo**

*Tema 2.1.* Dare una definizione di integrale di una funzione reale di variabile reale e presentare le sue proprietà principali.

*Tema 2.2.* Definire le nozioni di serie (numerica) convergente, serie divergente e serie indeterminata. Esibire e discutere esempi relativi a queste tre nozioni e calcolare la somma della serie geometrica di ragione  $q$ , con  $|q| < 1$ .

*Tema 2.3.* Trattare brevemente la teoria delle equazioni differenziali lineari ordinarie del primo ordine, servendosi anche di opportuni esempi illustrativi.

## ESERCIZI

**Algebra e Geometria**

*Esercizio 3.1.* Sia  $(A, <)$  un insieme totalmente ordinato.

- Definire l'estremo superiore e l'estremo inferiore (rispetto a  $<$ ) di un sottoinsieme  $B$  di  $A$ .
- L'insieme totalmente ordinato  $(A, <)$  si dice *Dedekind completo* se ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato di  $A$  ha estremo superiore.

Provare che se  $(A, <)$  è Dedekind completo, allora ogni sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato di  $A$  ha estremo inferiore.

*Esercizio 3.2.* Determinare fra i punti del piano  $z = y$  quello che minimizza la distanza da  $(1, 2, 1)$ .

*Esercizio 3.3.* Dimostrare che il polinomio  $x^3 + 5x^2 + x - 2$  non ha radici razionali.

**Calcolo**

*Esercizio 4.1.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{-4} \int_0^{x^2} (e^{\sin t} - 1) \cos(t^2) dt.$$

*Esercizio 4.2.* Si consideri la serie

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n+1)!}.$$

- Per quali  $x$  reali tale serie è convergente?
- Indicata con  $F(x)$  la somma di tale serie per i valori di  $x$  in cui essa è convergente, tracciate un grafico qualitativo di  $F$ .
- Calcolate il minimo di  $F$  in  $(0, +\infty)$ .

*Esercizio 4.3.* Sia  $p$  un polinomio e supponiamo che 1 sia radice di  $p$  con molteplicità 3. Provare che allora la derivata  $p'$  non cambia di segno in un intorno di 1.



**Prova Scritta di Ammissione al Tirocinio Formativo Attivo  
Università degli Studi di Trento - Classe 049/A - sezione fisica**

**(I)** Il candidato svolga **esclusivamente tre** dei seguenti 8 argomenti, dando risposta a **una tematica del gruppo (A) e una del gruppo (B) più un altro a scelta fra (A) e (B)**. Gli elaborati devono rientrare nei riquadri appositi.

(A) Argomenti di ambito teorico-storico (uno a scelta)

1. Si descrivano le principali caratteristiche del modello di Einstein alla base della descrizione del moto browniano.
2. Si spieghi il fenomeno dell'induzione elettromagnetica in termini delle leggi di Maxwell.
3. Si descriva l'approssimazione delle lenti sottili in ottica geometrica.
4. Si descrivano le principali tappe e i protagonisti della relatività ristretta.

(B) Argomenti di ambito sperimentale-tecnologico (uno a scelta)

1. Si descrivano i tratti essenziali della misura dell'effetto fotoelettrico.
2. Si illustri un possibile esperimento per la misura della massa dell'aria.
3. Si descriva una possibile tecnica di misurazione dell'accelerazione di gravità al suolo.
4. Si illustrino le basi fisiche del funzionamento di un ricevitore GPS.

**(II)** Il candidato **risolva a scelta esclusivamente quattro** fra i seguenti otto esercizi. Utilizzare unicamente gli spazi predisposti nel foglio.

1. Si determini la posizione, l'ingrandimento e la natura dell'immagine prodotta da una sorgente luminosa collocata a 10 cm da uno specchio sferico ideale il cui raggio è pari a 40 cm.
2. Qual è la carica elettrica complessivamente distribuita su tre condensatori di eguale capacità (30 pF) posti in serie e collegati a una differenza di potenziale elettrico di 200 V continui?
3. Con quale frequenza oscilla una massa di 0.5 kg sospesa a due molle ideali di costanti elastiche eguali e pari a 100 N/m, supponendo che le molle siano collegate in serie una all'altra?
4. Si calcoli la velocità finale di un fluido ideale, non comprimibile, che passa da una condotta di 4 cm di raggio percorso a 10 cm/s a una condotta di raggio pari a 2 cm.
5. Qual è la variazione di entropia che subisce l'universo in seguito alla caduta di un sasso di massa 0.5 kg dall'altezza di 2 m in uno stagno, sapendo che le temperature iniziali del sasso e dello stagno sono le stesse e pari a 15 °C?
6. Si calcoli il raggio di curvatura della traiettoria di un protone ( $M_p=1.67 \times 10^{-27}$  kg,  $e_p=1.60 \times 10^{-19}$  C) di energia pari a 5 MeV immerso in un campo magnetico costante di modulo pari a 3500 gauss e perpendicolare alla traiettoria del protone.
7. Sapendo che un oggetto procede con velocità pari a 6/10 di quella della luce rispetto a un determinato osservatore inerziale, si calcoli l'ammontare relativo della dilatazione temporale e della contrazione della lunghezza per questo medesimo osservatore.
8. A quale frequenza di taglio inizia l'emissione fotoelettrica per un elettrodo di argento, sapendo che il suo potenziale di estrazione è pari a 4.7 eV?