Università degli studi di Roma Tor Vergata
TFA

Classe A049 Matematica e Fisica

Istruzioni
La Commissione intende verificare *le conoscenze disciplinari, le capacità di analisi, interpretazione e argomentazione, il corretto uso della lingua italiana* (DM 11/11/11 art.1 Comma 12). Ogni quesito comprende più domande: la prima consiste in un semplice esercizio, la seconda prevede che il candidato esponga, in lingua italiana e in modo sintetico, i punti salienti di un particolare concetto o metodologia e la terza consiste in un esercizio più impegnativo. Ogni quesito vale 10 punti (8 punti per le prime due domande e 2 punti per la terza domanda). Per essere ammessi alla prova orale occorre un punteggio totale di almeno 21 punti. Il tempo a disposizione è di tre ore. Non è ammesso l'uso di calcolatrici elettroniche, nè di palmari, telefoni cellulari o altra apparecchiatura che permetta un contatto con l'esterno. Non è consentito consultare libri o manuali di alcun genere.

Quesito 1

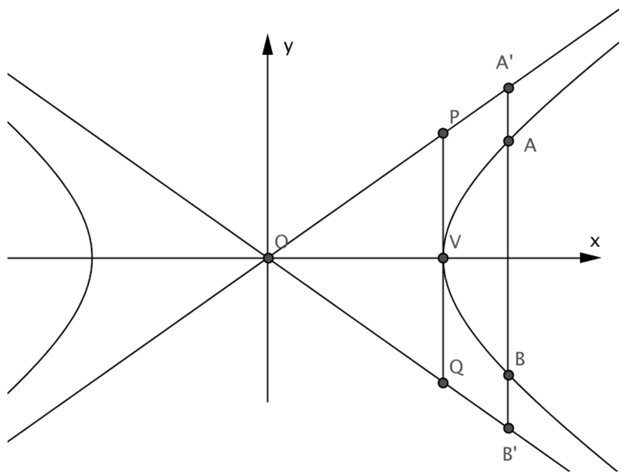
Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano si consideri l'iperbole di centro O ed equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Siano P e Q i punti dove la retta tangente nel vertice V all'iperbole interseca gli asintoti. Calcolare l'area del triangolo PQO.
b) Si discuta il concetto di asintoto e, sulla base della definizione data, dimostrare che le due rette di equazioni

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

sono asintoti dell'iperbole.
c) Consideriamo una retta *r* perpendicolare all'asse e siano A, B e A', B' i punti nei quali tale retta incontra l'iperbole e gli asintoti. Dimostrare che l'area del rettangolo di lati A'B e BB' è una costante che non dipende dalla posizione della retta *r*. *(Apollonio, Coniche, Libro II, prop. 14)*



Quesito 2

a) Al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\ln(2x+1) = kx$$

b) Definire la proprietà di convessità per funzioni di variabile reale e nel caso di funzioni derivabili discutere tale proprietà in relazione alle tangenti al grafico della funzione.

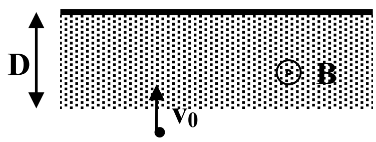
c) Discutere l'esistenza di massimi e minimi per funzioni di variabile reale. In particolare discutere l'esistenza del minimo per la funzione

$$f(x)=e^{x}+(1+x^{2})^{k}$$

al variare del parametro reale k.

Quesito 3

a) Un protone entra con velocità iniziale $v_0=2\times10^5$m/s in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme ortogonale alla velocità (vedi figura). Si ricorda che l'espressione della forza di Lorentz è $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. A distanza D=25cm è presente uno schermo. Qual è il minimo valore del campo $\vec{B}$ affinché il protone non giunga sullo schermo e riemerga dalla regione in cui è presente il campo?



(Utilizzare i seguenti valori approssimati: $q_p=1.6\times10^{-19}$ C e $m_p=1.6\times10^{-27}$kg)

b) La situazione fisica descritta nel problema a) è applicata sperimentalmente negli spettrometri di massa. Descrivere brevemente un possibile schema di funzionamento di tali apparati.

c) Con riferimento al problema a), determinare il valore massimo del campo per cui il protone rimane intrappolato nella regione.