Università di Pisa
Concorso di ammissione al tirocinio formativo attivo classe A049 - matematica e fisica
Prova scritta del 24 settembre 2012

PROBLEMA 1. Consideriamo il piano con la metrica euclidea.
(a1) Definire isometrie, similitudini e affinità.
(a2) Discutere sotto quali condizioni, dati due coppie di punti del piano (P_1, Q_1) e (P_2, Q_2) esiste una isometria f tale che $f(P_1) = P_2$ e $f(Q_1) = Q_2$.
(b1) Descrivere la composizione di una rotazione di centro C_1 e angolo α con una rotazione di centro C_2 e angolo β, sapendo che $C_1 \neq C_2$ e $\alpha \neq -\beta$.
(b2) Discutere se, date tre rette parallele r, t, s (a 2 a 2 non coincidenti), sia sempre possibile scegliere tre punti $R \in r$, $T \in t$, $S \in s$ che siano i vertici di un triangolo equilatero.

PROBLEMA 2. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una variabile a coefficienti in $\mathbb{R}$.
(a1) Definire la relazione di divisibilità in $\mathbb{R}[x]$ e discutere se si tratta di un ordinamento su $\mathbb{R}[x]$.
(a2) Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ monico di grado 2 tale che $p(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $p(x)$ è somma di due quadrati in $\mathbb{R}[x]$.
(b1) Dimostrare più in generale che se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ è monico di grado $n \geq 2$, e strettamente maggiore di 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $p(x)$ è somma di quadrati in $\mathbb{R}[x]$.
(b2) Il risultato al punto **(b1)** continua ad essere vero se supponiamo $p(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

PROBLEMA 3. Un proiettile di massa m viene lanciato con velocità v_0 da una rampa di altezza h in direzione parallela alla superficie terrestre nel punto di lancio. Si trascurino gli effetti dell'atmosfera.
(a1) Ricavare l'espressione della velocità v_0 che consente al proiettile di allontanarsi all'infinito con velocità finale v_1.
Successivamente determinare tale velocità nel caso particolare $m = 100$ Kg, $h = 1000$ m, $v_1 = 100$ km/h. Si usi l'approssimazione $g = 9.8$ m/s^2 per l'accelerazione di gravità. Dare il risultato con la precisione con cui sono stati forniti i dati.
(a2) Ricavare l'espressione della velocità v_0 in modo tale che la traiettoria sia circolare attorno alla terra.
(b1) Dire quali sono le quantità fisiche conservate durante il moto, e scriverne le espressioni.
(b2) Ricavare l'espressione della velocità minima iniziale che assicura al proiettile di non ricadere sulla terra.

PROBLEMA 4. Una particella di massa m e carica q si muove in un campo elettrico $\vec{E}$ e magnetico $\vec{B}$ statici. Si assuma che al tempo $t = 0$ la particella passi per l'origine con velocità $\vec{V} = (v; 0; 0)$.
(a1) Scrivere l'espressione della forza totale agente sulla particella e ricavare l'espressione dell'equazione oraria (cioè le coordinate in funzione del tempo) nei casi:

1. $\vec{B} = 0$ e $\vec{E} = (0; E; 0)$.
2. $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} = (0; 0; B)$.

(a2) Assumendo $m = 1.0 \times 10^{-27}$ g, $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, velocità iniziale v nulla, e $E = 2.000 \times 10^4$ V/cm, dare la velocità al tempo $t = 10$ s nel caso del punto 1 precedente. Dare il risultato con la precisione con cui sono stati forniti i dati.
(b1) Ricavare l'espressione della velocità in funzione del tempo nel caso che i campi elettrico e magnetico siano allineati, cioè $\vec{B} = (0; 0; B)$ e $\vec{E} = (0; 0; E)$.
(b2) Ricavare il lavoro fatto dalle forze agenti sulla particella nel caso (b1) in funzione del tempo.