



Avvertenza - Sarà valutata la padronanza del linguaggio scientifico, la correttezza e la completezza dell'esposizione e la giustificazione delle affermazioni.

Quesito 1.

a) Sia $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Cosa significa che f è iniettiva? Cosa significa che f è suriettiva? Cosa significa che un numero $x_0 > 0$ è un punto di minimo locale per f ?

b) Una scatola rettangolare aperta in alto ha un volume di 10 m^3 . La lunghezza della sua base è due volte la larghezza. Il materiale usato per costruire il fondo della scatola costa 10 Euro al m^2 , il materiale delle superfici laterali costa 6 Euro al m^2 . Determinare la larghezza della base per cui la scatola ha un costo minimo.

Quesito 2.

a) Dopo aver detto cosa significa che il corpo totalmente ordinato dei numeri razionali è denso nel corpo totalmente ordinato dei numeri reali, dimostrare questo risultato di densità.

b) Sull'insieme N dei numeri naturali l'addizione viene definita induttivamente ponendo per ogni $a, b \in N$:

$$a + 0 = a$$

$$a + \text{succ } b = \text{succ}(a + b)$$

ove $\text{succ } b$ indica il successore immediato di b .

Dimostrare per induzione la proprietà associativa dell'addizione sopra definita, cioè che comunque fissati $a, b \in N$, per ogni $c \in N$ si ha:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Quesito 3.

a) Il teorema fondamentale dell'algebra dice che il corpo complesso è algebricamente chiuso. Cosa significa? Quali conseguenze ha sulla fattorizzazione delle funzioni polinomiali in una variabile complessa?

b) Quali funzioni polinomiali in una variabile a coefficienti reali sono irriducibili sul corpo reale? (Irriducibile sul corpo reale significa che non si può scrivere come prodotto di polinomi a coefficienti reali di grado minore.)

c) Dato il polinomio

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5,$$

dopo aver osservato che si annulla per $z = i$, decomporlo in fattori irriducibili sul corpo reale.



Quesito 4.

Le leggi di Keplero sono state formulate sulla base delle osservazioni del moto dei pianeti raccolte da Tycho Brahe.

- Enunciare la prima e la seconda legge di Keplero. Discutere nel caso limite di orbita circolare a quale principio di conservazione della meccanica corrisponde la seconda legge di Keplero.
- La terza legge di Keplero afferma che il cubo della distanza media Sole-pianeta è proporzionale al quadrato del periodo di rivoluzione. Mostrare, sempre nel caso di orbita circolare, che questa relazione è consistente con la legge della gravitazione universale enunciata da Newton.
- Mostrare che la massa della Terra M_T può essere ricavata conoscendo la distanza D_{TL} e il periodo orbitale T_L della Luna, esprimerne il valore in funzione dei dati indicati e determinarne l'ordine di grandezza.

(Si ricordano i seguenti valori: costante gravitazionale $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$; distanza Terra-Luna $D_{TL} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$; periodo di rivoluzione della Luna $T_L = 27,3$ giorni)

Quesito 5.

Alla fine dell'ottocento, diversi esperimenti mostrarono che superfici metalliche potevano emettere cariche elettriche se venivano esposte a luce ultravioletta o raggi X. Tale fenomeno venne indicato con il nome di *effetto fotoelettrico*.

- Illustra le difficoltà della fisica classica nella interpretazione di questo fenomeno e quali furono le nuove idee, sia in relazione alle proprietà della radiazione elettromagnetica che alla struttura dei materiali, che permisero di spiegarlo.
- In un tubo di vetro in cui è stato praticato un notevole livello di vuoto vengono inserite due piastre metalliche, A e B, collegate a un generatore di tensione. Della radiazione elettromagnetica monocromatica viene fatta incidere sulla piastra A (elettrodo emettitore) costituita del materiale di cui si vogliono studiare le proprietà fotoelettriche. Gli elettroni emessi per effetto della radiazione incidente, vengono raccolti sulla piastra B (elettrodo collettore). Quando l'elettrodo collettore è reso positivo rispetto all'elettrodo emettitore $[(V_B - V_A) > 0 \text{ Volt}]$ si osserva un passaggio di corrente solo se la radiazione ha una lunghezza d'onda inferiore a 650 nm . Fornire l'espressione del lavoro di estrazione degli elettroni da questo metallo. Per lunghezze d'onda minori di 650 nm , esprimere l'energia cinetica degli elettroni emessi in funzione della frequenza della radiazione incidente.
- Se il potenziale del collettore B viene diminuito, si osserva che l'intensità della corrente fotoelettrica diminuisce fino a risultare nulla per un valore $(V_B - V_A) < 0 \text{ Volt}$. Questo valore viene definito *potenziale d'arresto* per il materiale che costituisce l'emettitore e risulta essere indipendente dall'intensità della radiazione incidente. Spiegare perché e calcolare la frequenza della radiazione incidente nel caso in cui il potenziale d'arresto sia $(V_B - V_A) = -1.5 \text{ Volt}$. Dire che tipo di relazione intercorre tra il potenziale di arresto e la frequenza della radiazione incidente.

(Si ricordano i seguenti valori: velocità della luce $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$, costante di Planck $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$, massa a riposo dell'elettrone $m_e = 9.108 \times 10^{-31} \text{ kg}$, carica dell'elettrone $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$)