Università di Modena e Reggio Emilia
TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO - CLASSE A049 Matematica e fisica
PROVA SCRITTA - 21 settembre 2012

busta 1
QUESITI DI MATEMATICA

1. Nel piano euclideo dotato di un riferimento cartesiano ortogonale monometrico, sia Γ il luogo dei punti che soddisfano l'equazione $X^2 - 2X = -4Y - Y^2$.
1.1 Stabilire che Γ è una circonferenza e determinarne il centro e il raggio.
1.2 Sia r la retta di equazione $Y = -X$. Determinare i punti di r per i quali passano esattamente due rette tangenti a Γ. Determinare i punti di r per i quali passa esattamente una retta tangente a Γ. Determinare i punti di r per i quali non passa alcuna retta tangente a Γ.
1.3 Detta Λ la circonferenza di centro $C=(-5/2,0)$ e raggio $\sqrt{5}/2$, determinare le equazioni delle eventuali rette che risultano tangenti sia a Γ che a Λ.
1.4 Siano Σ_1 e Σ_2 due circonferenze i cui rispettivi cerchi non abbiano punti interni comuni. Spiegare perché esistono almeno tre rette che risultano tangenti sia a Σ_1 che a Σ_2.

2. Si consideri la funzione f definita dalla legge

$$f(x) = \sqrt[3]{(2x+2)(2+x)^2} + \frac{1}{2}$$

2.1 Il grafico di f ha dei punti nei quali la retta tangente risulta verticale? La funzione f ammette dei punti di estremo relativo? Si può stabilire quanti siano i punti nei quali la funzione f si annulla?
2.2 Tracciare un grafico approssimativo della funzione f.
2.3 Illustrare sinteticamente i teoremi utilizzati nello studio della funzione f.

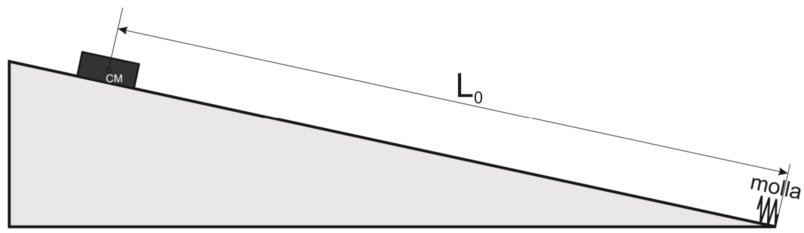
3. Illustrare brevemente il procedimento per trovare le radici n-esime dell'unità in campo complesso.
3.1 Trovare le radici cubiche complesse dell'unità.
3.2 Mostrare che le radici quinte complesse dell'unità con l'operazione di moltiplicazione in campo complesso costituiscono un gruppo. Quali sono i generatori di questo gruppo? Mostrare che i generatori di questo gruppo sono radici dell'equazione $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Quali sono i generatori del gruppo delle radici seste complesse dell'unità?
3.3 Ponendo $w = z + 1/z$ mostrare che l'equazione $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ può essere ricondotta ad un'equazione di secondo grado.

Università di Modena e Reggio Emilia
TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO - CLASSE A049 Matematica e fisica
PROVA SCRITTA - 21 settembre 2012

busta 1
QUESITI DI FISICA

1. Un cubetto di ghiaccio di massa m_1= 20.0 g alla temperatura T_1= - 20 C viene posto in un contenitore adiabatico contenente una massa m_2 = 120.0 g di acqua alla temperatura T_2= + 60 C . Si descrivano, nel modo più sintetico possibile, le basi teoriche dei processi fisici coinvolti nello scioglimento del cubetto di ghiaccio e nel riscaldamento/raffreddamento dell'acqua. Successivamente si calcoli la temperatura di equilibrio del sistema. Sapendo che la variazione di entropia di un sistema che compie una trasformazione reversibile infinitesima può essere calcolata dalla relazione $dS = \delta Q/T$, si calcoli la variazione di entropia del sistema.
Le costanti fisiche rilevanti per il calcolo sono: $L_F\,(ghiaccio) = 334.0 \quad J/g$,
$c_{ghiaccio} = 2.09 \quad J/(g\ K)$, $c_{acqua} = 4.18 \quad J/(g\ K)$. N.B. negli intervalli di temperature coinvolti i calori specifici di ghiaccio e acqua possono essere considerati ragionevolmente costanti.

2. Un carrello si muove con attrito radente piccolo, ma non trascurabile, lungo un piano inclinato angolo θ rispetto all'orizzontale. Alla base del piano inclinato, come indicato in figura, è posta una molla di lunghezza a riposo e massa trascurabili di elevata costante di molla *K*. La molla è collegata solidalmente con il piano inclinato di massa *M* molto più grande della massa *m* del carrello.



Assumendo che l'urto del carrello con la molla sia istantaneo e perfettamente elastico, descrivete nel modo più sintetico possibile il moto del carrello dopo l'urto.
Come è noto, un problema di dinamica di una singola particella può essere risolto, note le forze agenti, per via cinematica partendo dalla conoscenza delle accelerazioni e risalendo successivamente alle velocità e alle posizioni oppure invocando teoremi di conservazione e/o teoremi concernenti le forme di energia definite nel sistema. Descrivete, nel modo più sintetico possibile, i vantaggi e gli svantaggi dei due approcci per questo specifico sistema.
Determinate, usando uno qualsiasi dei due metodi di calcolo descritti, la distanza dalla base del piano inclinato a cui si ferma il carrello dopo questo primo urto, sapendo che il carrello era partito da fermo da un punto del piano inclinato a distanza L_0 dalla base.
Determinate poi, per induzione, la distanza L_n dalla base del piano inclinato percorsa dopo *l'n-esimo* urto con la molla.
I valori numerici delle costanti coinvolte sono: $\theta = 10^o$, $\mu = 0.05$, $M = 5.00\,Kg$, $m = 150\,g$,
$g = 9.807\,m\,s^{-2}$ e $K = 100\,Nm^{-1}$.

3. Un esperimento sull'effetto fotoelettrico viene svolto utilizzando un elettrodo emettitore di Calcio.
Variando la frequenza ν della radiazione incidente vengono misurati i potenziali di arresto V_s , definiti dalla relazione $eV_s = h\nu - \phi$ dove h è la costante di Planck e ϕ è la funzione lavoro del Calcio, riportati in tabella.

ν (10^{15} Hz)	1.180	0.958	0.822	0.741
V_s (Volt)	1.95	0.98	0.50	0.14

Stimare numericamente, utilizzando i dati riportati nella tabella, il valore della costante di Planck, usando per la carica elettronica il valore $e = 1.602\,10^{-19}\ C$. Considerando il primo valore della frequenza riportato in tabella, una intensità di radiazione I = 2.00 W/m^2 e una funzione lavoro ϕ del Calcio di 2.88 eV calcolare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi e il numero di elettroni emessi per unità di tempo e di area.

Università di Modena e Reggio Emilia
TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO - CLASSE A049 Matematica e fisica
PROVA SCRITTA - 21 settembre 2012

busta 2
QUESITI DI MATEMATICA

1. Sia $f : [0\ ,\ 1] \to \mathbf{R}$ una funzione continua con derivata continua (negli estremi dell'intervallo la derivabilità va intesa nel senso che esistono la derivata sinistra e la derivata destra). Supponiamo inoltre che sia $f(0)=0$ ed $f(1)=1$. Si chiede:
1.1 Dimostrare che se esistono due punti nei quali f vale, rispettivamente -2 e 3, allora esiste un punto x_0 in $]0, 1[$ tale che $f(x_0) = x_0$.
1.2 Quali ipotesi sui valori di $f'(0)$ e di $f'(1)$ potrebbero permettere di dimostrare che esiste un punto x_0 in $]0, 1[$ tale che $f(x_0) = x_0$?
1.3 Dimostrare che se vale la tesi del punto **1.1**, allora esiste un intervallo nel quale alla funzione $g(x) = f(x) / x$ puó essere applicato il teorema di Rolle.
1.4 Mostrare che se alla funzione g del punto precedente si può applicare il teorema di Rolle, allora esiste una retta che passa per l'origine degli assi cartesiani e che è tangente al grafico di f in un punto diverso dall'origine.

2. Sia **Z** l'insieme dei numeri interi. Per x, y in **Z** si definisca $x * y = y$.
2.1 Verificare che $*$ è un'operazione binaria su **Z** che non gode della proprietà commutativa.
2.2 Dimostrare che $*$ gode della proprietà associativa.
2.3 Indicata con $+$ l'ordinaria addizione su **Z**, dimostrare che $*$ è distributiva a sinistra rispetto a +, cioè risulta $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ per ogni a, b, c in **Z**. Dimostrare che $*$ non è distributiva a destra rispetto a $+$.
2.4 Sia • un'operazione binaria su **Z** che goda della proprietà distributiva sia a destra che a sinistra rispetto a +. Dimostrare che risulta $0 \bullet x = x \bullet 0 = 0$ per ogni x in **Z**. Dimostrare che, se per un dato intero a in **Z** vale la relazione $a \bullet 1 = 1 \bullet a$, allora risulta $a \bullet x = x \bullet a$ per ogni x in **Z**.

3. Spiegare cosa è la forma trigonometrica di un numero complesso e come possa essere utile per dare una interpretazione geometrica della moltiplicazione in campo complesso.
3.1 Mostrare che se l'espressione

$$\frac{z-i}{(3+2i)-i}$$

è un numero reale allora i punti z , i e $3+2i$ sono allineati nel piano complesso.
3.2 Quali numeri complessi sono uguali al loro coniugato? Mostrare che se z_0 e z_1 sono due numeri complessi distinti, allora l'equazione

$$\frac{z-z_0}{z_1-z_0} = \overline{\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)}$$

descrive la retta passante per z_0 e z_1 . N.B. Ricordare che la notazione $\bar{z}$ indica il complesso coniugato di z .

Università di Modena e Reggio Emilia
TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO - CLASSE A049 Matematica e fisica
PROVA SCRITTA - 21 settembre 2012

busta 2
QUESITI DI FISICA

1. Una sfera di massa M=5.00 g e raggio r=8.00 mm cade lungo la verticale in un liquido con velocità inizialmente nulla dall'altezza H = 3.00 m. Sapendo che, oltre le altre forze attive, la sfera è soggetta ad una forza di attrito viscoso di modulo $F_v = \gamma v$ dove γ è il coefficiente di attrito viscoso e v è la velocità di caduta, indicate graficamente lo schema delle forze agenti. Ricordando che l'accelerazione di caduta può essere scritta come la derivata temporale della velocità di caduta, scrivete e risolvete l'equazione del moto e descrivete, nel modo più sintetico possibile, le caratteristiche peculiari della soluzione. Le costanti fisiche rilevanti per la soluzione del problema sono: $\rho_{liquido} = 1.00\ Kg / dm^3$, $\gamma = 8\ Kg\ s^{-1}$

2. Nel modello planetario originale di Bohr dell'atomo d'idrogeno l'elettrone orbita, a causa dell'interazione Coulombiana attrattiva dipendente dall'inverso della distanza, attorno al protone lungo orbite circolari. In questo modello il momento angolare è quantizzato secondo multipli interi della costante di Planck ridotta $\hbar$. Di conseguenza le orbite dell'elettrone hanno raggi quantizzati e energie quantizzate.
Anche la Terra descrive attorno al Sole un'orbita quasi circolare e ciò è dovuto all'interazione gravitazionale Terra-Sole che dipende dall'inverso della distanza. Vista questa analogia formale con il moto dell'elettrone nell'atomo d'idrogeno, provare a quantizzare alla Bohr il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Dalla quantizzazione del momento angolare secondo la relazione $L = n\hbar$ ricavare la relazione $r = r(n)$ e la relazione $E = E(n)$ dove r è il raggio dell'orbita e E è l'energia del sistema. Sapendo che, sperimentalmente, il raggio dell'orbita della Terra attorno al Sole vale r_{TS} = 1.000 10^{11} m, calcolare il valore approssimato del numero quantico principale n del sistema Terra-Sole. Suggerimento: *per ricavare la relazione r=r(n) considerare l'equilibrio delle forze agenti sulla Terra in un punto qualsiasi della traiettoria e l'espressione del momento angolare di un corpo puntiforme che si muove su un'orbita circolare*.
I valori delle altre costanti rilevanti nel calcolo sono i seguenti: m_T = 5.983 10^{24} kg, m_S = 1.971 10^{30} kg, $G = 6.674\,10^{-11}\ m^3 / \left(Kg\ s^2\right)$ e $\hbar = 1.0546\,10^{-34}\ J\ s$.

3. Discutere, nel modo più sintetico possibile, il funzionamento di un motore termico basato sul ciclo di Carnot e il significato del suo rendimento η e le proprietà di un frigorifero basato sul ciclo di Carnot inverso e il significato della sua efficienza ε. Successivamente, considerare due macchine di Carnot reversibili accoppiate che operano la prima secondo il ciclo diretto e l'altra secondo il ciclo inverso. La macchina che svolge il ciclo diretto lavora fra due serbatoi di calore alle temperature T_1 = 200 C e T_2 = 150 C ed assorbe una quantità di calore Q_1 = 300 J dal serbatoio alla temperatura T_1. Il lavoro fornito da questa macchina termica è usato per alimentare il frigorifero che opera secondo il ciclo inverso di efficienza ε = 2.5 Determinare la quantità di calore Q_3 ceduta dalla macchina frigorifera al serbatoio di calore alla temperatura T_3. Determinare il valore numerico della temperatura T_3, sapendo che il quarto serbatoio è alla temperatura T_4 = 127 C.

Università di Modena e Reggio Emilia
TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO - CLASSE A049 Matematica e fisica
PROVA SCRITTA - 21 settembre 2012

busta 3
QUESITI DI MATEMATICA

1. Si consideri il piano euclideo dotato di un fissato riferimento cartesiano.
1.1 Determinare le equazioni dell'affinità f che fissa (globalmente) l'asse delle ascisse, fissa (globalmente) l'asse delle ordinate e trasforma il punto A di coordinate (1,1) nel punto A' di coordinate (1,2).
1.2 Detta t la retta di equazione Y=2X-1 determinare un'equazione della retta $f(t)$.
1.3 Siano r, s due rette incidenti in un punto e sia U un punto non appartenente nè a r nè a s. Siano r', s' due rette incidenti in un punto e sia U' un punto non appartenente nè a r' nè a s'. Spiegare perchè esiste ed è unica l'affinità g soddisfacente le seguenti proprietà:

$$g(r)=r', \quad g(s)=s', \quad g(U)=U'.$$

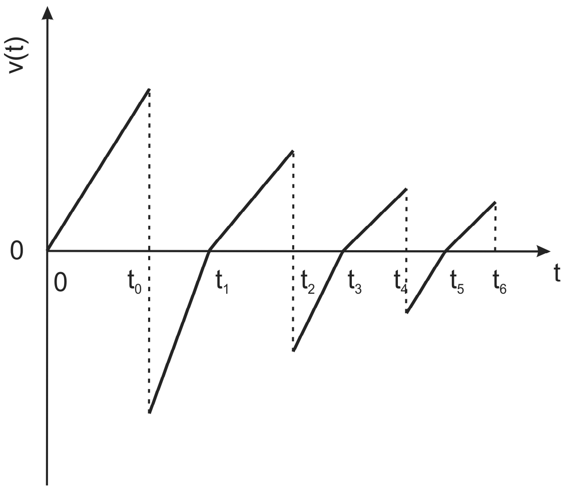
2. Nell'insieme **Z** dei numeri interi si indichi con $\equiv$ la relazione di congruenza modulo n per un fissato intero positivo n (quindi scriveremo $u \equiv v \pmod{n}$ intendendo che u, v sono interi la cui differenza è un multiplo di n).
2.1 Determinare un intero y che non sia multiplo di 15 e tale che risulti $3 \cdot y \equiv 0 \pmod{15}$.
2.2 Dimostrare che se z è un numero intero per il quale risulti $4 \cdot z \equiv 0 \pmod{15}$, allora z è un multiplo di 15.
2.3 Determinare un intero t per il quale risulti $4 \cdot t \equiv 1 \pmod{15}$.
2.4 Sia n un numero intero maggiore di 1 arbitrario. Spiegare per quali valori dell'intero a che non sia multiplo di n è possibile trovare un numero intero x che non sia multiplo di n e per il quale risulti $a \cdot x \equiv 0 \pmod{n}$. Dimostrare successivamente che per tali valori di a non esiste alcun numero intero w tale che risulti $a \cdot w \equiv 1 \pmod{n}$.

3. Enunciare in modo rigoroso il teorema degli zeri ed il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue. Mostrare con opportuni esempi l’importanza del dominio della funzione per la validità di tali teoremi
3.1 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua con derivata continua. Dato un punto x_0 si indichi con $t(x_0)$ la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 . Mostrare che l’ordinata del punto di intersezione tra $t(x_0)$ e l’asse y è una funzione continua di x_0 .
3.2 Mostrare che se la funzione f del punto precedente ha massimo assoluto che vale 3 e minimo assoluto che vale -2, allora esiste un punto x_0 tale che $t(x_0)$ passa per l’origine.
3.3 Mostrare che se la funzione del punto **3.1** si annulla in 3 punti distinti, allora esiste un punto x_0 tale che $t(x_0)$ passa per l’origine.

Università di Modena e Reggio Emilia
TIROCINIO FORMATIVO ATTIVO - CLASSE A049 Matematica e fisica
PROVA SCRITTA - 21 settembre 2012

busta 3
QUESITI DI FISICA

1. Un sensore di moto misura la velocità di un carrello che si muove lungo un piano inclinato di angolo θ rispetto all' orizzontale. Il sensore di moto che è posto alla sommità del piano inclinato assegna valore positivo alla velocità quando il carrello si allontana da esso e negativa quando si avvicina. Il grafico registrato dal sensore è il seguente:



Dalla osservazione del grafico deducete e disegnate uno schema semplificato della apparecchiatura sperimentale che ha registrato questo grafico. Definite le grandezze fisiche necessarie per spiegare almeno qualitativamente l'andamento della velocità come riportato nel grafico e costruite il modello formale (equazioni del moto, condizioni iniziali, …) del fenomeno. Calcolate in modo analitico le distanze misurate dalla base del piano inclinato raggiunte dal carrello nei punti di inversione del moto, assumendo che inizialmente il carrello si trovi alla distanza L_0, minore della lunghezza L del piano inclinato.

2. La serie di Humphreys è un gruppo di linee dello spettro dell'atomo di idrogeno. Essa comincia alla lunghezza d'onda 12368 *nm* ed è stata rilevata fino a 3281.4 *nm*. Quali sono i numeri quantici delle transizioni coinvolte nella serie? Quali sono le lunghezze d'onda delle sue prime cinque righe? Suggerimento: *per ricavare la relazione E=E(n) considerare l'equilibrio delle forze agenti sull'elettrone in un punto qualsiasi della traiettoria assunta circolare e l'espressione del momento angolare di un corpo puntiforme che si muove su questo tipo di orbita. Ricordate che la frequenza delle righe emesse da un atomo può essere scritta nella forma* $\nu = \Delta E / (2\pi\hbar)$.

Nel calcolo usare i seguenti valori per le costanti fisiche rilevanti: $e = 1.60210^{-19}\ C$, $\hbar = 1.05510^{-34}\ J\ s$, $m_e = 9.109\,10^{-31}\ Kg$, $c = 2.998\,10^{8}\ m/s$ e $K_{Coulomb} = 8.988\,10^{9}\ J\,m/C^2$.

3. In un ciclo, una macchina di Carnot sottrae 100 J di calore ad un termostato alla temperatura T_1=400 *K*, compie lavoro e cede calore ad un termostato alla temperatura T_2=300 *K*. Calcolare la variazione di entropia di ciascun termostato e quella dell'universo.